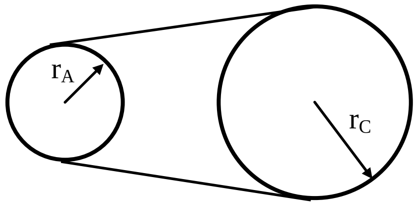
<u>Mecánica del Cuerpo Rígido</u>

<u>Órdenes de Magnitud – Cinemática de la Rotación en Contexto</u>

7.1 Estime la frecuencia de giro a potencia máxima de un ventilador de techo y su correspondiente velocidad angular. Estime también para un aspa: su largo, la velocidad lineal de su extremo más lejano al eje y la aceleración de su centro de masa.

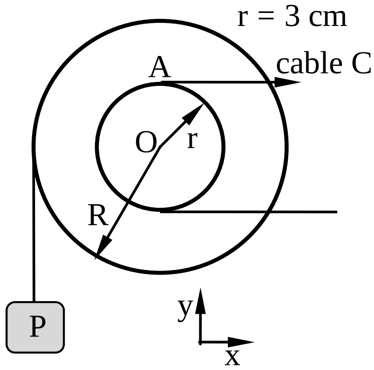
<u>Cinemática de la Rotación Pura</u>

7.2 Una rueda A de radio r_A = 10 cm está acoplada por medio de una banda B a otra rueda C de radio r_C = 25 cm, como se muestra en la figura. La rueda A aumenta su velocidad angular desde el reposo a razón de 1,6 rad/s^2.
Determine en cuánto tiempo llegará la rueda C a una frecuencia de 100 RPM, suponiendo que la banda no desliza.



(Sugerencia: si la banda no desliza, las velocidades lineales en la periferia de las dos ruedas deben ser iguales).
Respuesta: 16,4 s.

7.3 La pesa P está conectada a una polea doble por uno de los dos cables inextensibles, como se muestra en la figura. El movimiento de la polea es controlado por el cable C que tiene una aceleración constante a = 9 cm/s^2 i, con una velocidad inicial v_0 = 12 cm/s i.
Calcular:
a) El número de vueltas que efectúa la polea al cabo de 2 s.
b) El módulo y la dirección de la aceleración del punto A, ubicado en el borde de la polea interior, en t = 0 s.
c) La velocidad de la pesa P en t = 2 s.
d) Cuánto subió la pesa P después de 2 s.



Respuestas: a) 2,23 vueltas; b) 48,8 cm/s^2, 280,6º; c) 50 cm/s; d) 70 cm.

Solución.
a) Dada la aceleración del cable y su velocidad inicial, encontramos la aceleración angular y la velocidad angular inicia de la polea.

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} = 4\frac{rad}{s}$$
$$\alpha = \frac{a}{r} = 3\frac{rad}{s^2}$$

Luego el número de vueltas será:

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2}{2\pi} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = 2,23}$$

b) La aceleración del punto A tiene una componente tangencial y una normal.

$$\vec{a} = \alpha r\hat{t} + \omega^2 r\hat{n} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 9\frac{cm}{s^2}\hat{t} + 48\frac{cm}{s^2}\hat{n}$$

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{9^2 + 48^2} = \boldsymbol{48,84\frac{cm}{s^2}} \qquad \boldsymbol{\alpha} = arc\ tg - \frac{48}{9} = \boldsymbol{-79,38º}\ (o\ bien\ 280,52º)$$

c) Para la pesa la velocidad inicial y la aceleración serán:

$$v_0 = \omega_0 R = 20\frac{cm}{s}$$

$$a = \alpha R = 15\frac{cm}{s^2}$$

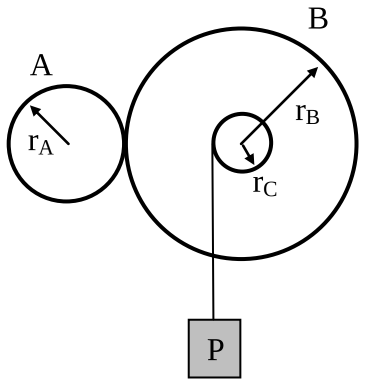
Por lo tanto la velocidad a los dos segundos será.

$$\boldsymbol{v} = 20\frac{cm}{s} + 15\frac{cm}{s^2}\ 2s = \mathbf{50}\frac{\boldsymbol{cm}}{\boldsymbol{s}}$$

d) Finalmente calculamos el desplazamiento.

$$\Delta \boldsymbol{y} = 20\frac{cm}{s}\ 2s + \frac{1}{2}\ 15\frac{cm}{s^2}(2s)^2 = \mathbf{70}\boldsymbol{m}$$

7.4 El engranaje A de radio r_A = 5 cm hace girar al engranaje B de radio r_B = 20 cm. Este último tiene solidario un cilindro interior de radio r_c = 10 cm en el cual lleva enrollada una soga. El sistema al rotar permite elevar un peso P (ver figura). Si A parte del reposo en t = 0 con una aceleración angular de módulo 0,2 t rad/s^3 y rotación antihoraria, calcular:
a) la velocidad de P en t = 10 s.
b) la longitud que ha recorrido la pesa P cuando t = 10 s,
Respuestas: a) v_p = 25 cm/s; b) 83,3 cm.



Solución. Primero relacionamos el movimiento de rotación de A con el de B y luego la rotación de B con la traslación de la pesa P.

$$\alpha_A r_A = \alpha_B r_B \ \rightarrow \ \alpha_B = 0{,}05t\frac{rad}{s^3} = \alpha_C$$

$$a_p = \alpha_C r_C = 0{,}5\ t\frac{cm}{s^3}$$

Finalmente integrando hallamos la velocidad y el desplazamiento de P al cabo de 10 segundos.

$$0{,}5\ t\frac{cm}{s^3} = \frac{dv}{dt}$$

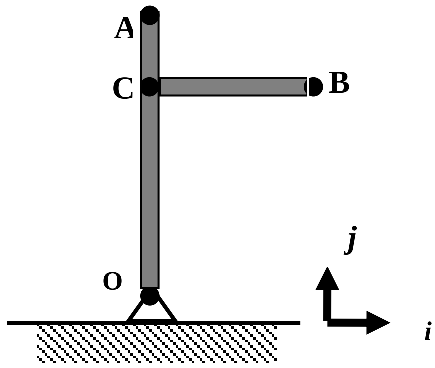
$$\int_o^v dv = \int_0^t 0{,}5\ t\frac{cm}{s^3}dt \ \rightarrow \ v = 0{,}25\ t^2 cm/s^3$$

$$\boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{t} = \mathbf{10}\boldsymbol{s}) = \mathbf{25}\frac{\boldsymbol{cm}}{\boldsymbol{s}}$$

$$0{,}25\frac{t^2 cm}{s^3} = \frac{dy}{dt}$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t 0{,}25\frac{t^2 cm}{s^3}dt \ \rightarrow \ \Delta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t} = \mathbf{10}\boldsymbol{s}) = \mathbf{83{,}3}\boldsymbol{cm}$$

7.5 Un mástil **OA** de 2m de altura tiene un asta **CB** de longitud igual a 1,5m. El punto **C** donde nace el asta se encuentra a 1,5m de la base **O**. El conjunto rígido, gira en un plano alrededor del punto fijo **O** como lo muestra la figura, en sentido horario.
Para el instante mostrado en la figura y para el sistema de coordenadas indicado, el vector velocidad del extremo **A** es $\mathbf{v}_A$ = 2 **i** m/s. Calcule el vector velocidad del punto **B.**
Respuesta: $\overrightarrow{v_B} = 1{,}5\frac{m}{s}\ \hat{\imath} - \ 1{,}5\frac{m}{s}\ \hat{\jmath}$



Solución

$$2\frac{m}{s} = \omega\ .2m \ \rightarrow \ \omega = 1\ s^{-1}$$

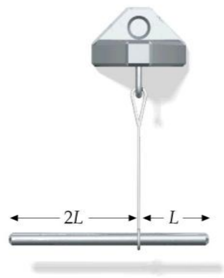
$$\overrightarrow{v_B} = \ 1\ s^{-1}.1{,}5\ m\ \hat{\imath} - \ 1\ s^{-1}.1{,}5\ m\ \hat{\jmath}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_B} = 1{,}5\frac{m}{s}\ \hat{\imath} - \ 1{,}5\frac{m}{s}\ \hat{\jmath}}$$

Órdenes de Magnitud – Dinámica de la Rotación en Contexto

7.6 Estime la fuerza que ejerce el soporte del aspa de un ventilador de techo a máxima potencia. Para ello base sus cálculos en las estimaciones que realizó en el problema 6.1.

Dinámica de la Rotación Pura



7.7 Una barra uniforme de longitud *l* = 3L está pivotada como se indica en la figura y se la mantiene en posición horizontal. ¿Cuál será aceleración angular inicial α de la barra cuando se la deja en libertad?
Dato: $Icm_{barra} = \frac{1}{12}Ml^2$.
Respuesta: $\alpha = \frac{g}{2L}$.

Solución. Primero usamos el teorema de Steiner para hallar el momento de inercia respecto del punto fijo y luego tomamos momentos respecto de dicho punto.

$$I_0 = \frac{1}{12}M\ (3L)^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = ML^2$$

$$Mg\frac{L}{2} = ML^2\alpha \ \rightarrow \ \boldsymbol{\alpha = \frac{g}{2L}}$$

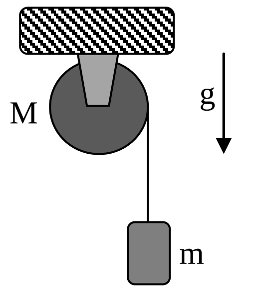
7.8 Una barra delgada de longitud L y masa M se soporta en posición horizontal por dos cuerdas cada una de ellas sujeta a un extremo como indica la figura. Si se corta una de las cuerdas, la barra puede girar alrededor del punto donde se conecta la otra cuerda (punto A de la figura).
a) Determinar la aceleración inicial del centro de masas de la barra.
b) Demostrar que la tensión inicial de la cuerda es mg/4 y que la aceleración angular de la barra alrededor de un eje que pase por A es 3g/2L.
c) ¿A qué distancia del punto A la aceleración inicial es igual a la de la gravedad?
Respuestas: $a)\ a_{cm} = \frac{3}{4}g;\ b)\ T = \frac{1}{4}Mg;\ c)\ x = \frac{2}{3}L$.

7.9 Una barra rígida homogénea de masa M y longitud *l* cuelga verticalmente sujeta de un pivote en su extremo superior, alrededor del cual puede girar libremente. En un determinado instante se la aplica a una distancia *x* del pivote un golpe que se modeliza mediante una fuerza horizontal de valor medio F_0 que actúa durante un pequeño intervalo de tiempo Δt.

a) Demostrar que la velocidad del centro de masa de la barra inmediatamente después del golpe es $v = \frac{3\,F_0 x \Delta t}{2\,M\,l}$.

b) Determinar el valor de la fuerza horizontal que ejerce el pivote sobre la barra y demostrar que esa fuerza vale cero si $x = \frac{2}{3}l$.

7.10 La figura muestra una polea (masa M y radio R) que puede girar alrededor de un eje horizontal y tiene una cuerda fuertemente arrollada en su periferia. Un bloque de masa m se une al extremo de la cuerda y, partiendo sin velocidad inicial, comienza a bajar verticalmente observándose que desciende una distancia h en un tiempo t.



Halle el momento debido al roce que el eje realiza sobre la polea.

Datos: R = 0,3 m, M = 4 kg, m = 0,5 kg, h = 3 m, t = 2 s, g = 10 m/s^2.

El momento de inercia baricéntrico de la polea es $I_{cm} = MR^2/2$.

Respuesta: Mr = 0,375 Nm.

Solución. Sabiendo que la masa m parte del reposo y se mueve con aceleración constante se obtiene por cinemática:

$$3\,m = \frac{1}{2}a(2s)^2$$
$$a = 1{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

El planteo dinámico para la polea sería:

$$T.R - Mr = \frac{1}{2}MR^2\alpha \ (1)$$

Para la partícula:

$$mg - T = ma \ (2)$$

Luego por cinemática, se sabe que la aceleración tangencial del borde externo de la polea es igual a la aceleración de la soga, por lo que:

$$a = \alpha R$$

Entonces la ecuación (1) puede rescribirse como

$$T - \frac{Mr}{R} = \frac{1}{2}Ma \ (3)$$

Sumando (2) y (3)

$$mg - \frac{Mr}{R} = \left(m + \frac{1}{2}M\right)a$$

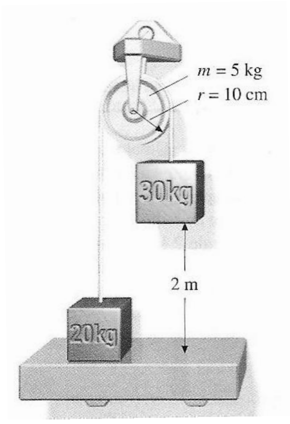
De donde surge que

$$Mr = \left[mg - \left(m + \frac{1}{2}M\right)a\right]R$$

Finalmente remplazando valores

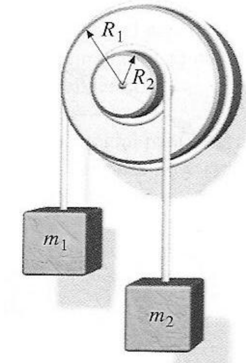
$$\boldsymbol{Mr = 0{,}375\ Nm}$$

7.11 En el sistema de la figura la polea tiene una masa de 5 kg y un radio de 10 cm y puede girar libremente alrededor de un eje sin fricción. La cuerda inextensible y de masa despreciable no resbala respecto de la polea. En un determinado instante el sistema parte del reposo.



a) Determinar la rapidez de los cuerpos luego de haberse desplazado 2 metros.
b) Calcular la rapidez angular de la polea en dicho instante.
c) Hallar la tensión que tiene cada tramo de cuerda.
Respuestas:
a) v = 2,76 m/s; b) ω = 27,6 rad/s; c) T_1 = 238,1 N, T_2 = 242,9 N.

7.12 Dos cuerpos cuelgan de dos cuerdas inextensibles y de masa despreciable, unidas a dos poleas solidarias entre sí y capaces de girar alrededor de un mismo eje sin fricción. El momento de inercia total del conjunto de poleas es de 40 kg.m^2 y los radios son R_1 = 1,2 m y R_2 = 0,4 m.



a) Considerando m_1 = 24 kg determine el valor de m_2 que hace que el conjunto de poleas tenga aceleración angular nula.
b) Si se coloca con suavidad un cuerpo de masa 12 kg sobre m_1 calcule la aceleración angular de las poleas y las tensiones de las cuerdas.
Respuestas:
a) m_2 = 72 kg; b) α = 1,393 rad/s^2, T_1 = 299,8 N, T_2 = 760,1 N.

Solución. a) En equilibrio las sumatorias de momentos y de fuerzas deben ser nulas.

$$m_1g = T_1 \ (1)$$

$$m_2g = T_2 \ (2)$$

$$T_1R_1 = T_2R_2 \ (3)$$

Remplazando (1) y (2) en (3)

$$\boldsymbol{m_2} = \frac{m_1R_1}{R_2} = \boldsymbol{72kg}$$

b) Al agregar 12 kg sobre m_1 entonces la polea rota en sentido antihorario, m_2 sube y m_1 baja. Teniendo en cuenta esto, elegimos un eje curvo que acompañe el movimiento.

$$T_2 - m_2g = m_2\alpha R_2 \ (4)$$

$$T_1R_1 - T_2R_2 = I\alpha \ (5)$$

$$m_1g - T_1 = m_1\alpha R_1 (6)$$

Resolvemos para hallar la aceleración haciendo (4).R_2+(5)+(6).R_1.

$$m_1gR_1 - m_2gR_2 = \left(m_1{R_1}^2 + m_2{R_2}^2 + I\right)\alpha$$

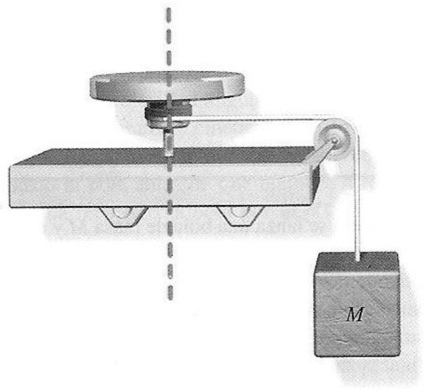
$$\boldsymbol{\alpha = 1,393\frac{rad}{s^2}}$$

Finalmente remplazando α en (4) y en (6) obtenemos los valores de las tensiones.

$$\boldsymbol{T_2} = m_2(\alpha R_2 + g) = \boldsymbol{760,1\ N}$$

$$\boldsymbol{T_1} = m_1(g - \alpha R_1) = \boldsymbol{299,8\ N}$$

7.13 En la figura se muestra un dispositivo para medir el momento de inercia de un objeto. Una plataforma circular posee un tambor concéntrico de radio 10 cm alrededor del cual se enrolla una cuerda inextensible y de masa despreciable que no resbala respecto al mismo. Esta cuerda pasa por una polea sin fricción en el eje y de su extremo cuelga un cuerpo de masa M = 2,5 kg. El cuerpo se deja caer y se mide el tiempo t_0 que transcurre en recorrer una distancia D = 1,8 m.



a) Considerando t_0 = 4,2 s determine el momento de inercia conjunto de la plataforma, el disco y la polea.

El sistema entonces se rebobina y el objeto cuyo momento de inercia se desea determinar se sitúa sobre la plataforma y se libera nuevamente al conjunto desde el reposo, midiéndose el tiempo t_1 que emplea ahora en recorrer la misma distancia D.

b) Considerando t_1 = 6,8 s determine el momento de inercia del objeto que se colocó sobre la plataforma.

Respuestas:

a) I_o = 1,2 kg.m^2; b) I_{cuerpo} = 1,986 kg.m^2.

Solución. Tomamos sumatoria de momentos respecto del eje de la polea y sumatoria de fuerzas en la masa M.

$$T\,R = I\alpha \;(1)$$

$$Mg - T = M\alpha R \;(2)$$

Multiplicamos la ecuación (2) por R y sumamos con la ecuación (1).

$$MgR = I\alpha + MR^2\alpha \;\;\rightarrow\;\; I = MR\left(\frac{g}{\alpha} - R\right) \;(3)$$

Luego sabemos que el cuerpo de masa M se mueve con MRUV, entonces:

$$D = \frac{1}{2}at^2 \;\;\rightarrow\;\; a = \frac{2D}{t^2} \;(4)$$

Remplazamos los tiempos de cada experiencia en la ecuación (4) y luego sabiendo a=αR empleamos la ecuación (3) para hallar el momento de inercia del sistema descargado y cargado.

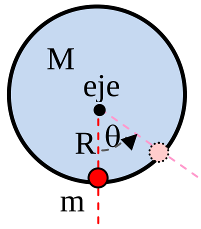
$$I = MR^2\left(\frac{gt^2}{2D} - 1\right) \;\rightarrow\;\; \boldsymbol{I_0 = 1{,}2\;kg\;m^2}\; e\; \boldsymbol{I' = 3{,}186\;kg\;m^2}$$

Por diferencia obtenemos el valor del momento de inercia del cuerpo incógnita.

$$\boldsymbol{I_{cuerpo}} = I' - I_0 = \boldsymbol{1{,}986\;kg\;m^2}$$

Energía en la Rotación Pura

7.14 Un disco de masa M, radio R y momento de inercia respecto de su centro de masa $I_{CM} = MR^2/2$ se encuentra en el plano vertical soportado por un eje horizontal sin roce que pasa por su centro. Se suelda en un punto de su borde un objeto de pequeño tamaño y masa m.



Cuando se encuentra en la posición que se muestra en la figura (el objeto pequeño en el punto más bajo) se le da al conjunto una velocidad angular inicial ω_0.

Determine el ángulo θ que define la orientación de la semirrecta que pasa por el pequeño objeto cuando el conjunto alcanza el reposo (ver firgura).

Datos: M, R, m, g, ω_0.

Respuesta**:** $\theta = arc\cos\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right)\frac{\omega_0{}^2 R}{2g}\right)$

Solución. Simplemente se plantea la conservación de la energía.

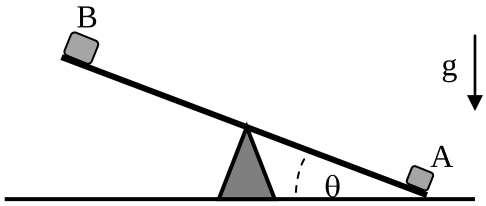
$$0 = mgR(1 - cos\theta) - \frac{1}{2}m\omega_0{}^2R^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_0{}^2$$

$$\boldsymbol{\theta = arc\cos\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right)\frac{\omega_0{}^2 R}{2g}\right)}$$

<u>Nota:</u> para que la solución sea válida se requiere que $\left(1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right)\frac{\omega_0{}^2 R}{2g}$ $\quad sea\ \leq 2$

7.15 Se construye un subibaja con un tablón de madera soportado por el medio, como se esquematiza en la figura. Primero se sienta Alicia en un extremo y luego Bautista en el otro. Calcule cuál es la rapidez del extremo donde está Bautista justo antes de chocar con el piso.

Datos: inclinación máxima del tablón, θ = 30º, aceleración de la gravedad, $g = 10$ m/s^2, masa de Alicia, $m_A = 17$ kg, masa de Bautista, $m_B = 19$ kg, masa del tablón, $M = 12$ kg, longitud del tablón, $\ell = 2$ m. Considere que el momento de inercia del tablón respecto de su punto medio es $I_{CM} = M\ell^2/12$ y que el soporte no produce roce al tablón.



Solución. Simplemente planteando la conservación de la energía se resuelve el problema:

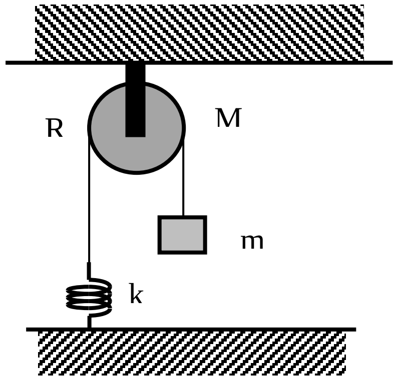
$$0 = \Delta K + \Delta U$$

$$2(m_B - m_A)g\ l\ sen\ \theta = \frac{1}{12}Ml^2\omega^2 + (m_A + m_B)v^2$$

Considerando que $v_A = v_B = v = \omega\ l/2$ *resulta*

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{2(m_B - m_A)g\ l\ sen\ \theta}{\frac{1}{3}M + m_A + m_B}} = \boldsymbol{1\frac{m}{s}}$$

7.16 Un bloque de masa m = 2kg está sujeto a un hilo ideal que rodea a una polea cilíndrica homogénea de masa M = 4kg y radio R. El otro extremo del hilo finaliza en un resorte de constante elástica k, sujeto al suelo como muestra la figura. El sistema se libera del reposo, con el resorte en su longitud natural y se observa que el máximo estiramiento del mismo es 0,4m. Calcule la máxima rapidez que alcanzó el bloque.



Datos: el momento de inercia de un cilindro homogéneo respecto del CM es $I_{CM}=MR^2/2$ y $g=10m/s^2$.
Respuesta: $v_{máx}$ = 1 m/s.

Solución

El máximo estiramiento ocurre cuando el cuerpo vuelve a detenerse, de manera tal que:

$$0 = \frac{1}{2} k\ (0{,}4\ m)^2 - 2kg\ .\ 10\frac{m}{s^2}\ .\ 0{,}4\ m$$

$$\boldsymbol{k = 100\frac{N}{m}}$$

Luego la máxima rapidez ocurre cuando la aceleración es cero, por lo tanto:

$$T_1 = mg$$

$$T_1 = \ k\ d$$

$$d = \frac{mg}{k} = 0{,}2\ m\ (estiramiento\ del\ resorte\ cuando\ v = v_{máx})$$

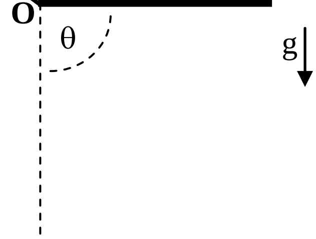
Finalmente por conservación de la energía:

$$0 = \frac{1}{2}100\frac{N}{m}\ (0{,}2\ m)^2 - 2kg\ .\ 10\frac{m}{s^2}\ .0{,}2\ m + \frac{1}{2}2kg\ {v_{máx}}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}4kgR^2\frac{{v_{máx}}^2}{R^2}$$

$$2\ J = 2\ kg\ {v_{máx}}^2$$

$$\boldsymbol{v_{máx} = 1\frac{m}{s}}$$

17 Una barra delgada, homogénea, de longitud ℓ y masa M puede girar sin roce alrededor de un delgado eje pasante en O (ver figura).



Se la suelta desde el reposo formando un ángulo θ_0 = 90º con la vertical. Se mide el módulo de la fuerza que ejerce el eje sobre la barra en el instante inicial y resulta ser 20 N. Determine la fuerza que ejerce el eje sobre la barra cuando ésta alcanza la posición vertical.
Dato: $I_{CM} = M\ell^2/12$. La longitud ℓ y la aceleración de la gravedad g <u>no son datos</u>.

Solución. Primero empleamos el teorema de Steiner para hallar el momento de inercia respecto del punto O.

$$I_o = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

Luego para el instante inicial planteamos sumatoria de fuerzas y sumatoria de momentos respecto del punto O.

$$Mg - F = Ma_{cm} \;\; \rightarrow \;\; Mg - Ma_{cm} = 20N$$

$$Mg\frac{l}{2} = \frac{1}{3}Ml^2\alpha \;\; \rightarrow \;\; \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

Como inicialmente la barra está quieta la aceleración del centro de masa es solo tangencial y por lo tanto:

$$a_{cm} = \alpha\frac{l}{2} = \frac{3}{4}g$$

Finalmente reemplazando en la sumatoria de fuerzas hallamos el peso de la barra.

$$Mg - \frac{3}{4}Mg = 20\ N \;\rightarrow\; Mg = 80N$$

Luego planteamos la conservación de la energía entre el instante inicial y el instante en que la barra está vertical.

$$0 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\omega^2 - Mg\frac{l}{2} \;\rightarrow\; \omega^2 = \frac{3g}{l}$$

Por último, cuando la barra está vertical planteamos sumatoria de fuerzas (ya que la sumatoria de momentos y por lo tanto la aceleración angular son nulas)

$$F - Mg = M\,a_{cm} = M\,\omega^2\frac{l}{2}$$

$$F = Mg + \frac{3}{2}Mg$$

$$\boldsymbol{F = 200\ N}$$