Apellido y nombre: | | **Legajo:** | |

1	2	3	4	Nota

Leer:

No escribir con lápiz ni con color rojo - Resolver los problemas en hojas separadas
Redactar de manera legible - La duración del examen es de dos horas y treinta minutos

1. (2,5 puntos) Se deja caer un objeto en el aire sin velocidad inicial. El objeto experimenta, además de la gravedad, una contribución a su vector aceleración en sentido contrario al movimiento, debida a la fricción con el aire, de módulo bv donde b es una constante y v, la rapidez instantánea.
Determine el tiempo que demora en alcanzar la mitad de su velocidad máxima.
Datos: $g = 10\ m/s^2$ y $b = 0{,}07\ s^{-1}$.

Solución.

$$\frac{dv}{dt} = g - bv \ \rightarrow \ \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g - bv} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\ln(g - bv) - \ln g = -bt$$

$$\ln\left(\frac{g}{g - bv}\right) = bt$$

La rapidez máxima ocurre cuando la aceleración es nula entonces:

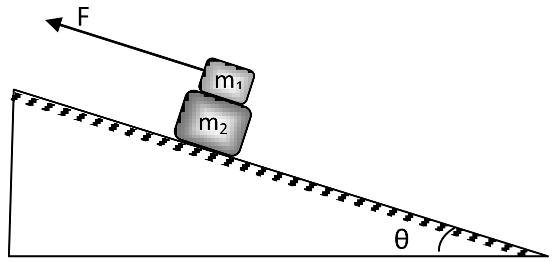
$$v_{máx} = \frac{g}{b}$$

Finalmente

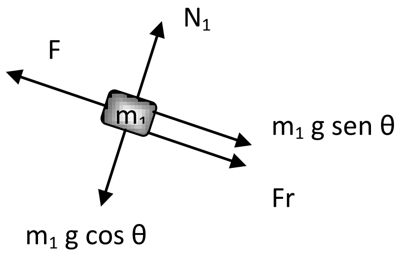
$$t = \frac{1}{b}\ln 2$$

$$\boldsymbol{t = 9,9\ s}$$

2. (2,5 puntos) Se tiene un bloque de masa m_1 = 5 kg apoyado sobre otro bloque de m_2 = 10 kg. Ambos bloques se encuentran sobre un plano inclinado un ángulo θ = 36,87º. Entre los bloques existe roce caracterizado por un coeficiente de roce estático μ_e = 0,8 y un coeficiente de roce cinético μ_c = 0,6. Entre el bloque de masa m_2 y el plano inclinado no existe rozamiento.
Se tira del bloque de masa m_1 con una fuerza F paralela al plano inclinado y se observa que ambos cuerpos ascienden juntos.
Determine el máximo valor de F compatible con la situación descripta. Considere g = 10 m/s^2.

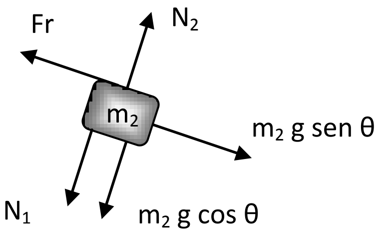


Solución. En este caso es muy importante analizar con cuidado cada diagrama de cuerpo libre, para luego poder escribir la segunda ley de Newton sobre cada cuerpo.



$$x)\ F - m_1 g\ sen\ \theta - Fr_e = m_1\ a\ (1)$$

$$y)\ N_1 - m_1 g\ cos\ \theta = 0\ (2)$$



$$x)\ Fr_e - m_2 g\ sen\ \theta = m_2 a\ \ (3)$$

$$y)\ N_2 - N_1 - m_2 g\ cos\ \theta = 0\ (4)$$

$$N_1 = m_1 g\ cos\ \theta\ \rightarrow\ Fr_{e_{máx}} = \mu_e\ m_1 g\ cos\ \theta\ \ (5)$$

Reemplazamos (5) en (3) para hallar $a_{máx}$

$$\mu_e\ m_1 g\ cos\ \theta - m_2 g\ sen\ \theta = m_2 a_{máx}$$

$$a_{máx} = \frac{\mu_e\ m_1 \cos\theta - m_2\ sen\ \theta}{m_2} g \quad *$$

Sumando (1) y (3):

$$F - (m_1 + m_2) g\ sen\ \theta = (m_1 + m_2) a$$

$$F_{máx} = (m_1 + m_2)(a_{máx} + g\ sen\ \theta)$$

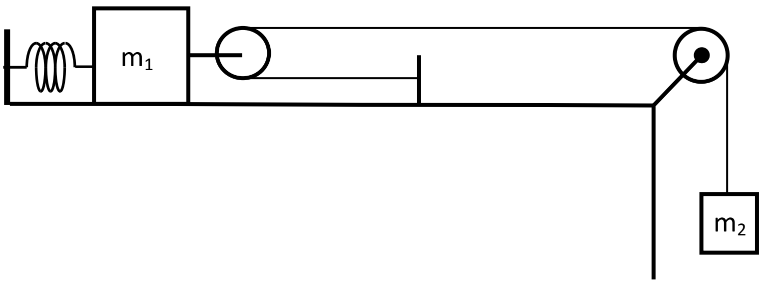
$$F_{máx} = (m_1 + m_2)\left(\frac{\mu_e \cos\theta\ m_1 - m_2\ sen\ \theta}{m_2} + \ sen\ \theta\right) g$$

$$F_{máx} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_2}\ \mu_e \cos\theta\ m_1 g$$

$$\boldsymbol{F_{máx} = 48\ N}$$

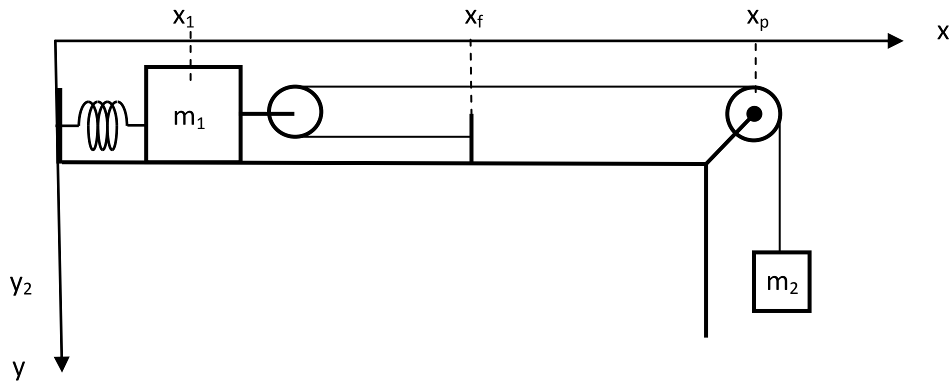
* *Si calcula $a_{máx}$ observará que es negativa. Esto incida que aplicando $F_{máx}$ subiría frenando.*

3. (2,5 puntos) Un bloque de masa m_1 = 20 kg que tiene unida una polea fija se encuentra apoyado sobre un plano horizontal sin roce y conectado mediante una cuerda ideal a un cuerpo de masa m_2 = 5 kg y a un soporte fijo, según se muestra en la figura. A la vez, del otro lado, el bloque de masa m_1 está unido a un resorte de constante elástica k = 100 N/m. Inicialmente el sistema está en reposo y el resorte se encuentra en su longitud natural.
Determine la máxima rapidez que alcanzará el bloque de masa m_2.



Solución. Primero planteamos la ligadura para establecer la relación de desplazamientos y de velocidades entre ambos bloques (ya que hay un resorte trabajaremos luego por energía).

La ligadura la escribimos con un eje de coordenadas con origen en el soporte que sostiene al resorte.



$$L = x_f - x_1 + x_p - x_1 + y_2$$

Derivando

$$0 = -2v_1 + v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = 2v_1$$

Además si llamamos d a lo que se desplaza el bloque 1 (lo mismo que se estira el resorte) y h a la distancia que baja el bloque 2 también vale que:

$$h = 2d$$

La velocidad será máxima cuando a sea cero, por lo tanto:

$$m_2 g - T = 0 \quad \rightarrow \quad T = m_2 g$$

$$2T - f_{elástica} = 0 \quad \rightarrow \quad kd = 2\,m_2 g$$

$$d = \frac{2\,m_2 g}{k}$$

Finalmente planteamos la conservación de la energía del sistema.

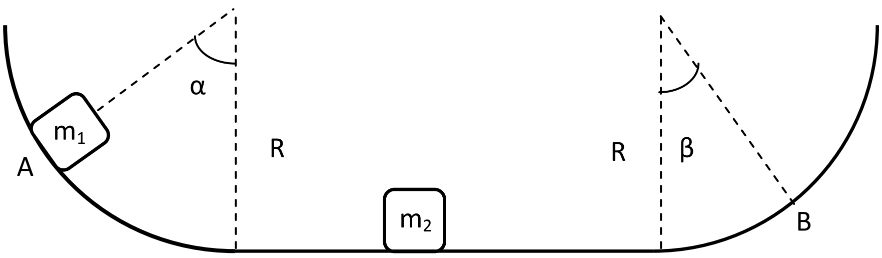
$$0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_2 g h$$

$$0 = \frac{1}{4}m_1 {v_{2_{máx}}}^2 + k\left(\frac{2\,m_2 g}{k}\right)^2 + m_2 {v_{2_{máx}}}^2 - 2m_2 g\; 2\,\frac{2\,m_2 g}{k}$$

$$v_{2_{máx}} = \sqrt{\frac{4m_2^2 g^2}{k\left(m_2 + \frac{1}{4}m_1\right)}}$$

$$\boldsymbol{v_{2_{máx}} = 3{,}16\,\frac{m}{s}}$$

4. (2,5 puntos) Se deja caer un bloque de masa m_1 por una rampa que forma un arco de circunferencia de radio R. Se observa que el bloque parte desde el reposo en el punto A (ver figura). La rampa luego empalma con tramo horizontal en el cual se encuentra reposando un segundo bloque de masa m_2. El bloque 1 colisiona elásticamente con el bloque 2. Luego de la colisión el bloque 2 asciende por la rampa de la derecha, que también forma un arco de circunferencia de radio R, deteniéndose en el punto B.



Determine el cociente m_1/m_2. Considere que la pista no realiza roce a los bloques.
<u>Únicos datos</u>: $\alpha = 70º$, $\beta = 50º$

Solución. Primero escribimos la conservación de la energía para el bloque de masa m_1 antes del choque.

$$0 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 - m_1 gR(1 - cos\alpha) \;\rightarrow\; v_1 = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)}\ (1)$$

Luego analizamos el choque elástico, planteando la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética (que equivale a tener un coeficiente de restitución igual a 1).

$$p = cte \;\rightarrow\; m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \;\rightarrow\; m_1(v_1 - v_1') = m_2 v_2'\ (2)$$

$$e = 1 \;\rightarrow\; v_1 = v_2' - v_1' \;\rightarrow v_1' = v_2' - v_1\ (3)$$

Reemplazando (3) en (2) obtenemos:

$$m_1(2v_1 - v_2') = m_2 v_2' \;\rightarrow\; \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2'}{2v_1 - v_2'}\ (4)$$

Luego del choque se conserva la energía del bloque 2.

$$0 = -\frac{1}{2}m_2{v_2'}^2 + m_2 gR(1 - cos\beta) \;\rightarrow\; {v_2}' = \sqrt{2gR(1-\cos\beta)}\ (5)$$

Finalmente reemplazamos (5) y (1) en (4) para obtener:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1-\cos\beta}}{2\sqrt{1-\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\beta}}$$

$$\boldsymbol{\frac{m_1}{m_2} = 0,583}$$