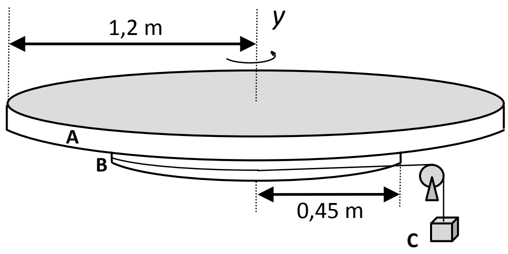
1. (2,5 puntos) La figura muestra dos discos homogéneos unidos, A y B, que giran alrededor del eje ***y***, bajo la acción de una cuerda ideal enrollada alrededor del cilindro B. Esta cuerda pasa por una polea sin masa y su extremo libre se ha fijado a una masa puntual C.
Las masas A, B y C son respectivamente 65, 15 y 8 kg.
Calcule la aceleración angular de los discos. Exprese este resultado con cuatro decimales.
Considere g = 10 m/s^2 y que la fórmula del momento de inercia de cada disco es I_{CM} = ½ M R^2.



Solución. Planteamos sumatoria de fuerzas para el objeto y sumatoria de momentos para el conjunto de poleas.

$$mg - T = ma = m\alpha R_B \; (1)$$

$$TR_B = \left(\frac{1}{2}M_A R_A^2 + \frac{1}{2}M_B R_B^2\right)\alpha \; (2)$$

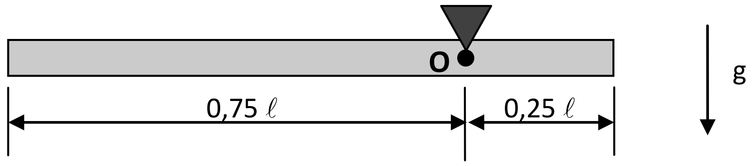
Haciendo (1) x R_B + 2 obtenemos:

$$mgR_B = \left(\frac{1}{2}M_A R_A^2 + \frac{1}{2}M_B R_B^2 + mR_B^2\right)\alpha$$

De donde finalmente:

$$\boldsymbol{\alpha = 0{,}7209\,\frac{rad}{s^2}}$$

2. (2,5 puntos) Una barra homogénea de longitud ℓ y masa M puede girar libremente alrededor de un eje sin roce que pasa por el punto O. Inicialmente se la mantiene en reposo en posición horizontal como se muestra en la figura y luego se la deja libre. Determine el cociente entre el módulo de la fuerza que ejerce el eje sobre la barra en el instante inmediatamente posterior a ser liberada y el módulo de la fuerza que ejercerá el eje cuando la barra pase por la posición vertical.
Único dato: $I_{CM} = M\,\ell^2/12$.



Solución. Primero empleamos el teorema de Steiner para hallar el momento de inercia de la barra respecto del eje dado.

$$I_0 = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}Ml^2$$

Luego planteamos la sumatoria de momentos respecto del centro de masa en el instante inicial:

$$Mg\frac{l}{4} = I_0\alpha \quad \rightarrow \frac{Mg\frac{l}{4}}{I_0} = \alpha$$

A continuación planteamos la sumatoria de fuerzas:

$$Mg - F_0 = Ma_{cm} \quad \rightarrow \quad F_0 = Mg - M\alpha\frac{l}{4}$$

$$\boldsymbol{F_0 = \frac{4}{7}Mg}$$

Luego planteamos la conservación de la energía.

$$0 = \frac{1}{2}I_0\omega^2 - Mg\frac{l}{4}$$

$$\omega^2 = \frac{24g}{7l}$$

Finalmente planteamos la sumatoria de fuerzas para la barra cuando está en posición vertical.

$$F_1 - Mg = M\omega^2\frac{l}{4}$$

$$F_1 = M\left(g + \frac{6}{7}g\right)$$

$$\boldsymbol{F_1 = \frac{13}{7}Mg}$$

$$\boldsymbol{\frac{F_0}{F_1} = \frac{4}{13}}$$

3. (2,5 puntos) Se realiza un experimento que consiste en dejar caer una esfera maciza desde el punto más alto de un plano inclinado (ángulo θ con la horizontal) y medir el tiempo que tarda en descender hasta el punto más bajo, partiendo del reposo y rodando sin deslizar. Luego se realiza el mismo experimento con un cilindro macizo. El módulo de la diferencia entre ambos tiempos resulta ser 0,1 s.
Determine la altura h a la que se encuentra el punto más alto del plano inclinado respecto del plano horizontal que contiene al punto más bajo.
Considere $g = 10\ m/s^2$ y $\theta = 36{,}87^o$ y que las fórmulas de los momentos de inercia respecto del centro de masa son: $I_{esfera} = (2/5)MR^2$, $I_{cilindro} = (1/2)MR^2$. No suponga que las masas o los radios sean necesariamente iguales para ambos objetos.

Solución. Tomando momento respecto de un punto cualquiera sobre el plano inclinado se obtiene:

$$Mgsen\,\beta\, R = (\varepsilon MR^2 + MR^2)\alpha$$

Como rueda sin deslizar $a_{cm} = \alpha R$, entonces:

$$gsen\,\beta = a_{cm}\,(\varepsilon + 1)\ donde\ \varepsilon = \frac{1}{2}\ para\ el\ cilindro\ y\ \varepsilon = \frac{2}{5} esfera.$$

$$a_{cm_{esf}} = \frac{5}{7} g\ sen\,\beta$$

$$a_{cm_{cil}} = \frac{2}{3} g\ sen\,\beta$$

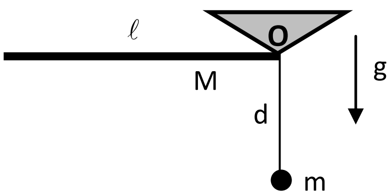
Luego planteamos la diferencia de tiempos que es dato del problema:

$$t_2 - t_1 = 0{,}1\ s = \sqrt{\frac{2L}{sen\,\theta}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{7}{5}}\right)$$

$$L = 17{,}395\ m$$

$$\boldsymbol{h = 10{,}44\ m}$$

4. (2,5 puntos) Una barra de longitud ℓ y masa M inicialmente se encuentra en posición horizontal con su extremo unido al pivote O. Se la deja caer y cuando llega a la posición vertical impacta elásticamente contra un pequeño cuerpo de masa m sujeto al mismo pivote por una cuerda de longitud d, inextensible y de masa despreciable.



Determine el valor del ángulo θ, respecto de la vertical, hasta el cual asciende <u>la barra</u> después de la colisión.
Datos: M/m = 3, ℓ = 0,3 m, d = 0,1 m, g = 10 m/s^2.
Considere que el momento de inercia de la barra respecto de su centro de masa es $I_{CM} = M\ell^2/12$.

Solución.

Primero planteamos la conservación de la energía antes del choque.

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2 = Mg\frac{l}{2} \rightarrow \omega^2 = \frac{Mgl}{I_0} \ (1)$$

Luego planteamos la conservación del momento angular y de la energía cinética en el choque (esto último lo reemplazamos por e=1)

$$I_0\omega = I_0\omega' + mv'd \ (2)$$
$$\omega d = v' - \omega' d(3)$$

Multiplicamos la ecuación (3) x md y la sumamos con la ecuación (2)

$$(I_0 - md^2)\omega = (I_0 + md^2)\omega'$$

$$\omega' = 0{,}8\ \omega$$

Finalmente la conservación de la energía después del choque para la barra será:

$$\frac{1}{2}I_0\omega'^2 = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$0{,}8^2 = 1 - \cos\theta$$

$$\boldsymbol{\theta = 68{,}9º}$$