1. (2,5 puntos) Una partícula se mueve con una trayectoria circular de radio R. Su velocidad inicial es v_0 y su aceleración tangencial está dada por la fórmula $a_t = k.s$, donde k es una constante y s es la longitud recorrida desde el instante inicial. Determine el valor de s para el cual el módulo del vector aceleración es $a = \sqrt{29} = 5{,}3852$.
Datos $v_0 = 1$, R = 1, k = 1. Se entiende que todas las variables y todas las constantes tienen sus unidades correspondientes del sistema internacional (MKS), pero se las omite para simplificar el enunciado y los cálculos correspondientes a la resolución.

Solución.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

$$ks = v\frac{dv}{ds}$$

$$\int_0^s ks\, ds = \int_{v_0}^{v} v\, dv$$

$$k\, s^2 = v^2 - v_0^2 \;\; \rightarrow v^2 = v_0^2 + ks^2$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$a^2 = k^2 s^2 + \frac{v^4}{R^2}$$

$$29 = s^2 + (1 + s^2)^2$$

$$0 = s^4 + 3s^2 - 28$$

Definimos $z=s^2$

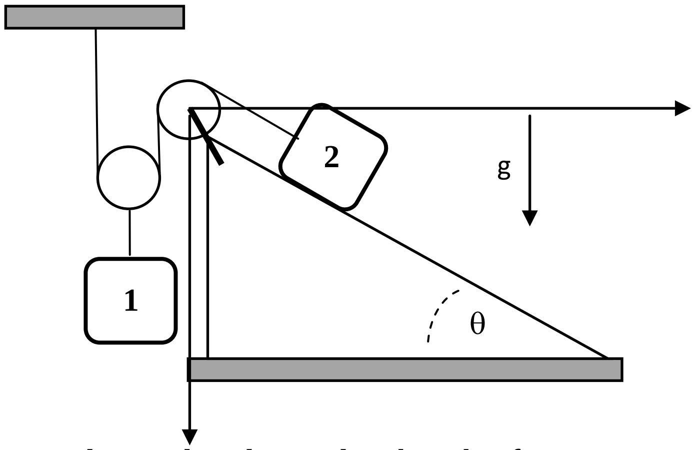
$$0 = z^2 + 3z - 28$$

$$z_1 = 4$$

$$z_2 = -7$$

Por lo tanto la única solución real del problema es z=4 y finalmente ***s = 2 m***

2. (2,5 puntos) El sistema que se muestra en la figura no presenta roce alguno y los objetos 1 y 2 permanecen en reposo. Halle el valor del cociente n = m_2 / m_1 para que esto ocurra. Más tarde se realiza un experimento con la misma configuración pero se duplica el valor de n. Determine el módulo de la aceleración que tendrá cada objeto.
Datos: g = 10 m/s^2, θ = 36,87º.
La masa de las poleas es insignificante y el plano inclinado está unido al piso.



Solución. Para plantear la ligadura elegimos un sistema de coordenadas unido a la polea fija. De ese modo queda:

$$L = \frac{x_2}{\cos\theta} + 2y_1 + ctes$$

Derivando obtenemos:

$$0 = a_2 + 2a_1 \;\; \rightarrow \;\; a_2 = -2a_1 \; (1)$$

Luego plantemos la segunda ley de Newton para ambas partículas y la polea:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \;\; (2)$$

$$T_1 - 2T_2 = 0 \;\; \rightarrow T_1 = 2T_2 (3)$$

$$m_2 g sen\,\theta - T_2 = m_2 a_2 (4)$$

Reemplazando (1) en (4) y (3) en (2) obtenemos:

$$m_1 g - 2T_2 = m_1 a_1 \; (5)$$

$$T_2 - m_2 g sen\,\theta = 2m_2 a_1 (6)$$

Multiplicando (6) x 2 y sumando con (5) se obtiene:

$$m_1 g - 2m_2 g sen\theta = (m_1 + 4m_2) a_1$$

<u>Si el sistema está en equilibrio entonces:</u>

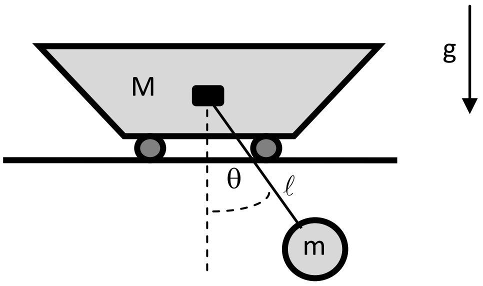
$$m_1 g - 2m_2 g sen\theta = 0 \;\rightarrow \boldsymbol{\frac{m_2}{m_1}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\,sen\,\theta}} = \mathbf{0,833}$$

Si se duplica el cociente de masas resulta:

$$a_1 = -1{,}3\frac{m}{s^2} \rightarrow \boldsymbol{a_1 = 1,3\frac{m}{s^2}\; hacia\; arriba}$$

$$\boldsymbol{a_2 = 2,6\frac{m}{s^2}\; hacia\; abajo}$$

3. (2,5 puntos) Un carrito de masa M puede moverse libremente sobre una pista horizontal angosta. De él cuelga un péndulo formado por un objeto pequeño de masa m y una cuerda inextensible de longitud ℓ.



El sistema comienza a moverse cuando el carrito y el objeto están en reposo y la cuerda forma un ángulo θ con la dirección vertical.

Determine la velocidad $\vec{v}$ del objeto y la velocidad $\vec{V}$ del carrito cuando la cuerda pase por la dirección vertical, por primera vez dando sus módulos e indicando claramente la dirección y el sentido de cada vector.

Datos: m, M, ℓ, g, θ.

Solución. En el sistema se conserva la energía (pues el trabajo de la tensión sobre el mismo es nulo) y la cantidad de movimiento horizontal (ya que la única fuerza con componente horizontal es la tensión y es interna).

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 - mgl(1 - \cos\theta) \;(1)$$

$$0 = mv + MV \quad \rightarrow \quad v = -\frac{M}{m}V \;(2)$$

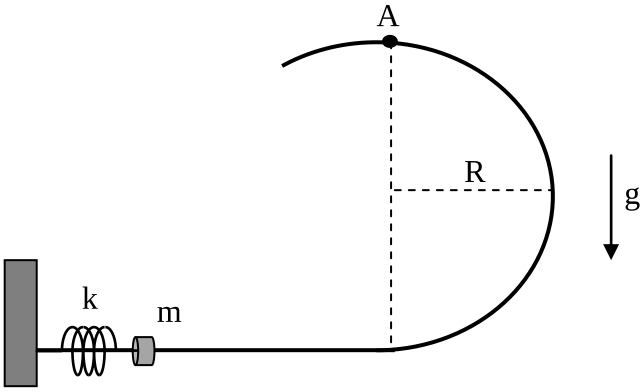
Reemplazando (2) en (1) obtenemos:

$$2mgl(1 - \cos\theta) = \frac{M}{m}V^2(M + m)$$

$$V = \sqrt{\frac{2m^2gl(1 - \cos\theta)}{M(M + m)}} \; hacia\ la\ derecha$$

$$v = -\sqrt{\frac{2Mgl(1 - \cos\theta)}{(M + m)}} \; hacia\ la\ izquierda$$

4. (2,5 puntos) Un pequeño objeto de masa m puede deslizar sin roce ensartado en un alambre rígido que posee un tramo rectilíneo y otro curvo con forma de arco de circunferencia de radio R, todo contenido en un plano vertical; ver figura.
Mediante un resorte de constante elástica k comprimido una distancia d se impulsa al objeto y se observa que éste pasa luego por el punto más alto del alambre (A).
Determine los valores posibles de R si se desea que el módulo de la normal que el alambre realiza al objeto móvil en el punto más alto sea la mitad de su peso.
Datos: m = 0,2 kg, g = 10 m/s^2, k = 99 N/m, d = 0,1 m.



Solución. Existen dos escenarios posibles para la situación planteada, uno con la normal hacia el centro y otro con la normal hacia afuera. Plantearemos ambos casos por separado.

Con la normal hacia afuera

$$mg - N = m\frac{v_A^2}{R} \rightarrow \frac{1}{2}mg = m\,\frac{v_A^2}{R}\ (1)$$

Con la normal hacia adentro

$$mg + N = m\frac{v_A^2}{R} \rightarrow \frac{3}{2}mg = m\,\frac{v_A^2}{R}\ (2)$$

En ambos casos se conserva la energía.

$$0 = \frac{1}{2}m\,v_A^2 + mg2R - \frac{1}{2}k\,d^2$$

$$kd^2 = mv_A^2 + 4mgR\ (3)$$

Remplazando (1) en (3) obtenemos:

$$kd^2 = \frac{9}{2}mgR \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R = 0,11\,m}$$

Remplazando (2) en (3) obtenemos:

$$kd^2 = \frac{11}{2}mgR \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R = 0,09\,m}$$