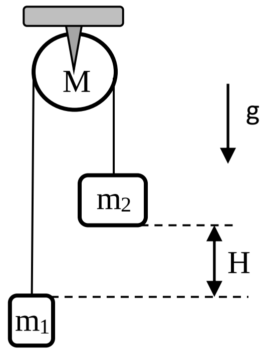
1. (2,5 puntos) La figura muestra una polea (masa M y radio R) que puede girar alrededor de un eje horizontal el cual le presenta roce caracterizado por un momento M_r. La polea tiene una cuerda fuertemente arrollada en su periferia.
Un bloque de masa m_1 se une a un extremo de la cuerda y un bloque de masa m_2 se une al otro extremo.
Considerando que el conjunto parte del reposo cuando los bloques se encuentran separados una distancia H, determine la rapidez de los bloques en el momento en que se cruzan.
Datos:
R = 0,3 m, M = 4 kg, m_1 = 2 kg, m_2 = 4 kg, H = 2 m, g = 10 m/s^2, M_r = 0,6 Nm.
El momento de inercia baricéntrico de la polea es $I_{CM} = MR^2/2$.



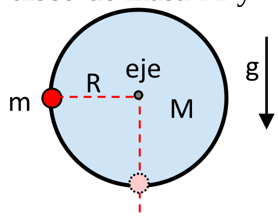
Solución. Planteamos la energía del sistema para dar respuesta directa a la pregunta planteada:

$$-Mr\,\Delta\theta = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 + m_1g\frac{H}{2} - m_2g\frac{H}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)gH - Mr\frac{H}{R}}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}}$$

$$\boldsymbol{v = 2,1213\ m/s}$$

2. (2,5 puntos) Un partícula de masa m se encuentra firmemente adherida a un disco de masa M y radio R el cual puede girar libremente alrededor de un eje que pasa por su centro de masa.



Inicialmente la partícula se encuentra en reposo formando un ángulo de 90º con la vertical (ver figura). Se observa que cuando la partícula pasa por el punto más bajo de su trayectoria el disco ejerce sobre la misma una fuerza de módulo (5/3) mg.
Halle el cociente M/m. Considere para el disco $I_{CM} = MR^2/2$.

Solución. Planteamos primero la conservación de la energía entre los puntos mencionados:

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 - mgR$$

$$2m\,(2gR - v^2) = M\,v^2 (1)$$

Luego planteamos la sumatoria de fuerzas en el punto más bajo de la trayectoria:

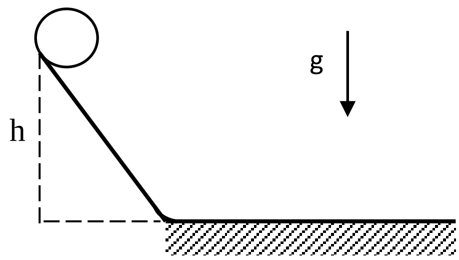
$$\frac{5}{3}mg - mg = m\frac{v^2}{R} \quad \rightarrow v^2 = \frac{2}{3}gR\ (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$\frac{8}{3}mgR = M\frac{2}{3}gR$$

$$\boldsymbol{\frac{M}{m} = 4}$$

3. (2,5 puntos) En el esquema que se muestra, un cilindro desciende sin velocidad inicial sobre un plano inclinado de altura h, perfectamente liso. Llega luego a un plano horizontal áspero con un coeficiente de roce μ_C, desconocido. Halle la velocidad del centro de masa del cilindro cuando éste alcanza la rodadura.
Datos: $g = 10$ m/s^2, $h = 1{,}8$ m, $I_{CM} = MR^2/2$.
No son datos la masa M y el radio R del cilindro.



Solución: primero planteamos la conservación de la energía para el cilindro mientras cae por el plano inclinado (note que si no hay roce, no rueda).

$$0 = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 - Mgh \;\; \rightarrow v_{c,} = 6\frac{m}{s}$$

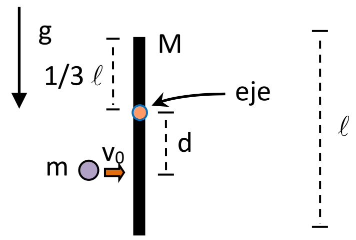
Luego observamos que respecto de un punto sobre el plano horizontal se conserva el momento angular, de modo que:

$$RMv_{cm} = RMv_r + \frac{1}{2}MR^2\omega_r$$

$(llamamos\ v_r\ y\ \omega_r\ a\ los\ valores\ de\ v\ y\ \omega\ cuando\ el\ cilindro\ rueda\ \mathrm{sin}\ deslizar)$

$$v_{cm} = \frac{3}{2}v_r \;\rightarrow\; \boldsymbol{v_r = 4\frac{m}{s}}$$

4. (2,5 puntos) Una varilla de masa M y longitud ℓ está en reposo en posición vertical sostenida por un delgado eje horizontal que pasa por un orificio ubicado a una distancia de 1/3 ℓ del extremo superior de la barra.
A una distancia d debajo del eje recibe el impacto de una partícula de masa m (no despreciable) y velocidad horizontal de módulo v_0. Si se observa que en la colisión se conserva la cantidad de movimiento determine el cociente d/ℓ.
Dato: $I_{CM} = M\ell^2 / 12$.
<u>No son datos</u>: M, m, ℓ, g, ni el tipo de colisión.



Solución. Antes que nada hallamos el momento de inercia respecto del eje, utilizando el teorema de Steiner.

$$I_0 = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{1}{6}l\right)^2$$

$$I_0 = \frac{1}{9}Ml^2$$

Luego planteamos la colisión, en la cual nos informan que se conserva la cantidad de movimiento (además claro del momento angular respecto del eje de rotación).

$$L_0 = cte \ \rightarrow \ dmv_0 = dmv + I_0\omega \ \rightarrow dm\,(v_0 - v) = I_0\omega \ (1)$$

$$p = cte \ \rightarrow mv_0 = mv + Mv_{cm} \ \rightarrow m(v_0 - v) = M\omega\frac{l}{6} \ (2)$$

Hacemos (1) / (2):

$$d = \frac{6I_0}{Ml}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{2}{3}l}$$