1. Sobre la cara horizontal de un bloque de mármol se excava un hueco semiesférico de radio R. Si se apoya sobre el hueco una partícula a una altura H del punto más bajo y se la impulsa en una dirección horizontal y tangente a la superficie del hueco, comenzará a deslizar. Suponga que la partícula no sufre roce alguno y calcule el valor de la rapidez angular necesario para que realice una circunferencia horizontal. Exprese su resultado en función de H, R y la aceleración de la gravedad g.

Solución. Planteamos la correspondiente sumatoria de fuerzas en los ejes normal y binormal (en el eje tangencial no hay fuerzas ya que la aceleración tangencial es nula).

$$N\ sen\ \theta = m\omega^2 R\ sen\ \theta\ (1)$$

$$N \cos\theta = mg\ (2)$$

Dividiendo (1) / (2) obtenemos:

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{\omega^2 R}{g} \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R\cos\theta}\ (3)$$

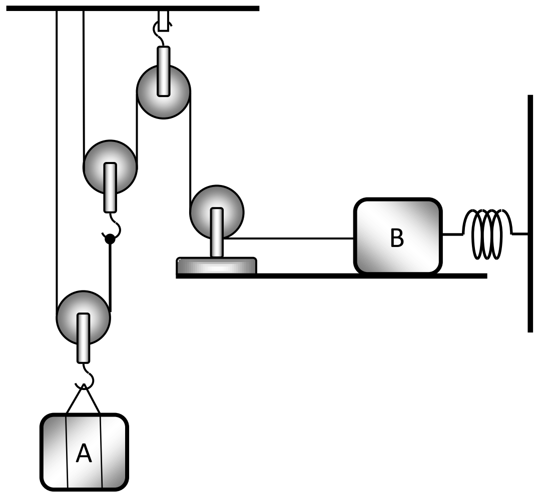
Además, sabemos que:

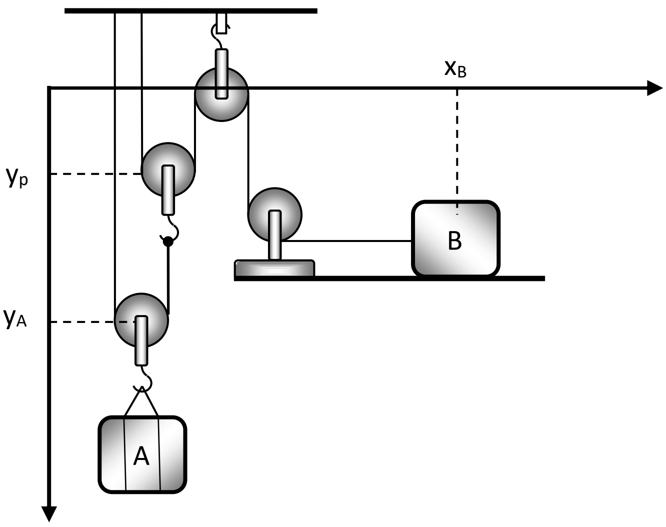
$$R\cos\theta = R - H\ (4)$$

Finalmente reemplazando (4) en (3)

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{g}{R-H}}}$$

2. Un cuerpo A de masa m_A cuelga de una polea móvil mientras que otro cuerpo B de masa m_B se encuentra sobre un plano horizontal que no le presenta roce (ver figura). El cuerpo B se encuentra unido al extremo de un resorte de constante elástica k que tiene su otro extremo fijo a la pared. Inicialmente el sistema se encuentra en reposo y el resorte está en su longitud natural.
Determine la máxima rapidez que alcanzará cada bloque.
Datos: m_A = 4 kg, m_B = 0,75 kg, k = 100 N/m, g = 10 m/s^2.





Solución. Como en el problema hay dos cuerdas, es necesario escribir dos ecuaciones de ligaduras. Para ello primero definimos un sistema de coordenadas.

$$l_1 = y_p + y_p + cte_1 + x_B - cte_2$$

$$l_2 = y_A + y_A - y_p$$

Derivando:

$$0 = 2\, v_p + v_B$$

$$0 = 2v_A + v_P$$

Por lo tanto, resulta ser $v_B = -4\, v_A$.

Además, también $a_B = -4\, a_A$. y $\Delta x_B = -4\, \Delta y_A$.

Escribimos las correspondientes ecuaciones de Newton para los cuerpos A y B y las poleas móviles.

$$Polea\ 1)\ T' - 2T_B = 0 \ \ \to T' = \ 2T_B$$

$$Polea\ 2)\ 2T' - T_A = 0 \ \ \to\ T_A = 2T'$$

Por lo tanto, $T_A = 4\, T_B$

$$m_A g - 4T_B = m_A a_A\ (1)$$

$$Fe - T_B = m_B a_B \quad \to \quad T_B - Fe = 4\, m_B a_A\ \ (2)$$

Haciendo (1) + 4 x (2) obtenemos:

$$m_A g - 4Fe = (m_A + 16 m_B) a_A$$

La máxima rapidez será entonces cuando

$$kd = \frac{m_A g}{4} \ \to d = 0{,}1\ m$$

Luego planteamos la conservación de la energía <u>para el sistema</u>.

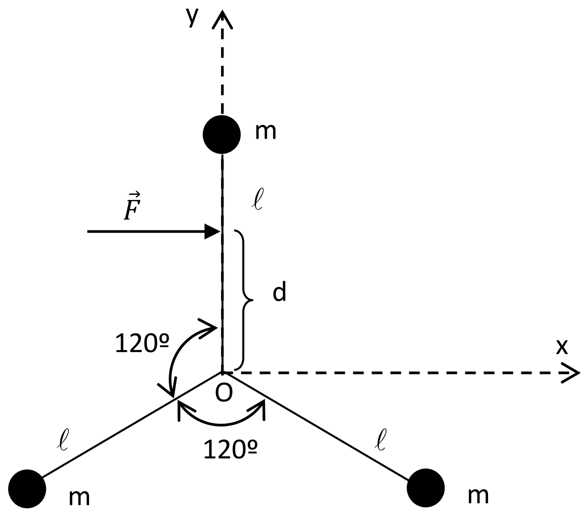
$$0 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \ + \frac{1}{2} m_B v_B^2 - m_A g h + \frac{1}{2} k d^2$$

La máxima rapidez se dará cuando d = 0,1 m y h = 0,025 m.

$$\boldsymbol{v_{A_{máx}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2m_A gh - kd^2}}{\boldsymbol{16m_B + m_A}}} = \boldsymbol{0{,}25\,\frac{m}{s}}$$

$$\boldsymbol{v_{B_{máx}} = 1\,\frac{m}{s}}$$

3. (2,5 puntos) Tres partículas idénticas, cada una masa m, están soldadas a los extremos de un armazón rígido de masa despreciable. Los brazos de dicho armazón tienen una longitud ℓ = 0,4 m y forman entre sí un ángulo de 120º (ver figura). El sistema se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal sin roce. En el instante t = 0 se aplica sobre uno de los brazos una fuerza constante $\vec{F} = F\hat{\imath}$ a una distancia d = 0,3 m del origen O. Como consecuencia de ello, la aceleración del centro de masa en dicho instante vale $\vec{a} = 4\frac{m}{s^2}\hat{\imath}$. Calcule la aceleración angular del sistema en t = 0.



Solución. Primero hallamos el momento de inercia del sistema de partículas respecto de su centro de masa (punto O).

$$I_{cm} = 3\, m\, l^2$$

Luego planteamos la sumatoria de fuerzas en el instante inicial.

$$F = 3m\, a_{cm}$$

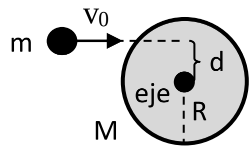
Finalmente planteamos sumatoria de momentos respecto del centro de masa.

$$Fd = 3\, m\, l^2\, \alpha \;\; \rightarrow \;\; \alpha = \frac{Fd}{3ml^2}$$

$$\alpha = \frac{3\, a_{cm}\, d}{3\, l^2}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 7,5\, \frac{rad}{s^2}}$$

4. Un disco ubicado horizontalmente puede girar sin roce alrededor de un delgado eje fijo vertical que pasa por su centro. En cierto momento el disco está en reposo y recibe el choque plástico de una partícula que queda adherida en su borde. Antes de chocar la partícula tiene una velocidad v_0 y la recta que define su dirección se encuentra a una distancia d del eje de rotación (ver figura). Luego del choque se observa que el disco da una vuelta por segundo. Halle el cociente M/m.
Datos: v_0 = 20 m/s, d = 0,2 m, R = 0,3 m



Solución. Simplemente planteamos la conservación del momento angular respecto del eje de rotación.

$$m v_0 d = \left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega$$

$$m(v_0 d - \omega R^2) = \frac{1}{2}MR^2\omega$$

$$\frac{M}{m} = \frac{2(v_0 d - 2\pi R^2)}{2\,\pi\,R^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{M}{m} = 12{,}147}$$