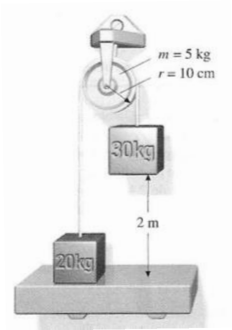
1. (2,5 puntos) En el sistema de la figura la polea tiene una masa de 5 kg y un radio de 10 cm y puede girar alrededor de un eje el cual le presenta rozamiento caracterizado por un momento de roce $\mathscr{M}_{\text{roce}}$ constante. La cuerda inextensible y de masa despreciable no resbala respecto de la polea. El sistema parte del reposo y se observa que al momento de cruzarse los bloques tienen una rapidez de 1,9 m/s. Determine el valor de $\mathscr{M}_{\text{roce}}$. Las masas de los bloques son 20 kg y 30 kg, ver figura. Considere para la polea Icm = $MR^2/2$ y la aceleración de la gravedad g = 10 m/s^2.



Solución. La manera más rápida de resolver el problema es plantear lo que ocurre con la energía. En este caso será:

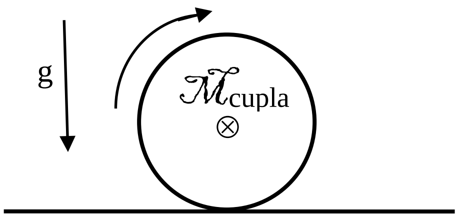
$$-M_{roce}\Delta\theta = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + m_1gh - m_2gh$$

Resolvemos sabiendo que h = 1m y Δθ=h/R.

$$M_{roce} = \frac{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)v^2 + 2(m_1 - m_2)gh}{-2h}R$$

$$\boldsymbol{M_{roce} = 0,52375\ Nm}$$

2. (2,5 puntos) Un cilindro homogéneo de masa M y radio R inicialmente en reposo, está apoyado sobre un plano horizontal. Entre el plano y el cilindro existe roce, caracterizado por los coeficientes μ_E y μ_C, estático y cinético respectivamente. En el instante t = 0 s se aplica sobre dicho cilindro una cupla (par o torque) variable cuyo módulo vale $\mathscr{M}_{cupla} = 2\,t$ Nm/s y su dirección es perpendicular al plano de la figura, con sentido entrante (ver figura). Determine el valor de la aceleración del centro de masa para t = 3 s.



Datos: M = 5 kg; g = 10 m/s²; R= 0,1 m; $\mu_e = 0{,}6$; $\mu_c = 0\ 4$; $I_{CM} = 0{,}5\ MR^2$

Solución. Primero hallamos la cupla máxima que se puede aplicar para que el cilindro ruede sin deslizar.

$$M_{cupla} - F_r R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha \ (1)$$

$$F_r = M a_{cm} \ (2)$$

Si rueda sin deslizar $a_{cm} = \alpha R$ y si además queremos hallar la cupla máxima está a punto de deslizar, por lo que $F_r = \mu_e N$. Remplazando en (2) y en (1) obtenemos:

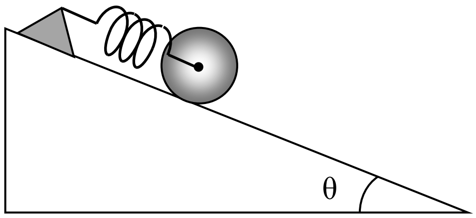
$$a_{cm_{máx}} = \mu_e g$$

$$M_{cupla_{máx}} = \frac{3}{2} M \mu_e g R = 4{,}5\ Nm$$

Ahor hallamos el valor de la cupla para t = 3 s que resulta ser 6 Nm. Como la cupla supera a la máxima, entonces el cilindro desliza y simplemente la de la ecuación (2) obtenemos el valor de la aceleración del centro de masa.

$$\mu_c m g = m a_{cm} \ \rightarrow \ \boldsymbol{a_{cm} = 4 \frac{m}{s^2}}$$

3. (2,5 puntos) Un rodillo de masa M = 12 kg y radio R se encuentra en reposo sobre un plano inclinado un ángulo de 30º con la horizontal, sujeto por una pequeña traba. Un resorte ideal de constante elástica k = 5000 N/m se encuentra inicialmente en su longitud natural, con un extremo unido a un soporte fijo y el otro extremo unido al centro de masa del rodillo (ver figura). A continuación, se quita la traba que sostiene al rodillo y se desea saber cuál será la máxima rapidez que alcanzará el centro de masa del mismo. Para ello considere que el plano inclinado es lo suficientemente rugoso como para que el rodillo ruede todo el tiempo sin deslizar. Considere para el rodillo $I_{CM} = 0,5\ MR^2$.



Solución. Primero hallamos el punto de equilibrio del sistema, que es donde la rapidez será máxima. En dicho punto la sumatoria de fuerzas y de momentos debe ser nula.

$$\vec{F})\ Mgsen\,\theta - kd + Fr = 0$$

$$\vec{M}_{cm})\ -Fr\,R = 0 \quad \rightarrow \quad Fr = 0$$

$$d = \frac{Mgsen}{k}\ (estiramiento\ del\ resorte\ cuando\ la\ rapidez\ es\ máxima)$$

$$\boldsymbol{d = 0,012\ m}$$

Ahora planteamos la conservación de la energía para hallar el valor de vmáx (el trabajo neto del roce estático vale cero).

$$0 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}kd^2 - Mgd\ sen\,\theta$$

Como rueda sin deslizar $v_{cm}=\omega R$.

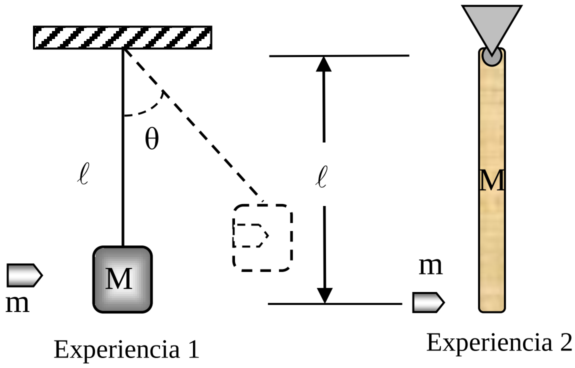
$$0 = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}kd^2 - Mgd\ sen\,\theta$$

Finalmente resulta:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4Mgdsen\,\theta - 2kd^2}{3M}}$$

$$\boldsymbol{v_{cm_{máx}} = 0,2\,\frac{m}{s}}$$

4. (2,5 puntos) En una primera experiencia se construye un péndulo balístico con un bloque de masa M y una cuerda inextensible de longitud ℓ. Una pequeña bala de masa m impacta horizontalmente con una rapidez v_0 contra el bloque y queda incrustada en él. Luego de la colisión el conjunto asciende hasta formar un ángulo θ con la vertical.
En una segunda experiencia una barra rígida homogénea de masa M (igual a la del bloque de madera) y longitud ℓ (igual a la de la cuerda) cuelga verticalmente sujeta de un pivote en su extremo superior, alrededor del cual puede girar libremente. Una pequeña bala de masa m impacta horizontalmente con una rapidez v_0 contra el extremo inferior de la barra y queda incrustada en ella (la masa m y la rapidez v_0 son iguales a las de la experiencia anterior). Luego de la colisión la barra asciende hasta formar un ángulo β con la vertical. Considere para la barra Icm = $ML^2/12$.
Determine el valor de β tomando como únicos datos el ángulo θ = 36,87º y el cociente M/m = 6.
No son datos la longitud ℓ ni la aceleración de la gravedad g.



Solución. Para el péndulo balístico vale la conservación de la cantidad de movimiento en el choque y luego la conservación de la energía.

$$mv_0 = (m+M)v' \quad \rightarrow \quad v_0 = 7v'$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = (m+M)gl\,(1-\cos\theta)$$

$$v'^2 = 2gl(1-\cos\theta) = 0{,}4\,gl$$

$$v_0^2 = 19{,}6\,gl\ (1)$$

Luego para la experiencia 2, sabemos que en la colisión se conserva el momento angular (sólo respecto del pivote) y que luego de la colisión se conserva la energía.

$$mv_0 l = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2\right)\omega \quad \rightarrow \quad v_0 = 3\omega l\ (2)$$

Elevando al cuadrado, y reemplazando (1) en (2):

$$19{,}6\,g = 9\,\omega^2 l\ (3)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2\right)\omega^2 = \left(mgl + Mg\left(\frac{l}{2}\right)\right)(1-\cos\beta)$$

$$3l^2\omega^2 = 8gl(1-\cos\beta)$$

$$\omega^2 = \frac{8}{3}\frac{g}{l}\ (1-\cos\beta)\ (4)$$

Finalmente reemplazamos (4) en (3):

$$19{,}6\,g = 24\,g\,(1-\cos\beta)$$

$$\boldsymbol{\beta = 79{,}436}\,°$$